Lycée :Bannene-Bodheur
Prof : Slimani Akram
Date :04/12/2012

Devoir de synthèse N°1

(Mathématiques)

Année scolaire:2012-2013
Niveau :4ème Maths
Durée : 3 heures

Exercice N°1 : (2.25points):

Choisir la réponse exacte en justifiant :

Une réponse sans justification ne sera pas notée.

ABCD est un carré de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et I est le milieu de [AB].

1) L'isométrie : $S_{(BC)} o\, S_{(BD)} o\, R_{(O,\frac{\pi}{2})}$ est une :
   a) Une rotation
   b) Une translation
   c) Une symétrie glissante.
2) $t_{\overrightarrow{BD}}$ o $S_{(BC)}$ est égale à :
   a) $t_{\overrightarrow{CD}}$ o $S_{(OI)}$
   b) $t_{\overrightarrow{BC}}$ o $S_{(OI)}$
   c) $S_{(BC)}$
3) $S_{(DC)} o\, t_{\overrightarrow{BC}}\ o\, t_{\overrightarrow{IO}}$ est une symétrie :
   a) Orthogonale d'axe : Med[BC]
   b) glissante d'axe : Med[BA] et de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
   c) Orthogonale d'axe : Med[IO]

Exercice N°2 :(6 points) :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2}$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$; interpréter le résultat graphiquement.
   b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
2) a) Vérifier que $f'(x)= \frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$
   b) Dresser le tableau de variation de f .
3) a) Déterminer l'équation de la tangente T à C_f au point I d'abscisse 0 .
   b) Justifier que I est un point d'inflexion de C_f .
4) Tracer T et C_f dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ **(voir annexe figure n°1)** .
5) Soit h la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par :

$$h(x)=\begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x < 0 \\ -1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

   a) Montrer que h est dérivable sur $]-\infty, 0[$
   b) Montrer que $h'(x)=x.f'(x)$ pour tout $x \in\ ]-\infty, 0[$.

c) Soit t$\in\ ]-\infty, 0]$.

Montrer qu'il excite au moins c $\in\ ]t, 0[$ tel que $\frac{h(t)+1}{t}$ = c.f '(c) .

d) En déduire que h est dérivable à gauche en 0 et que $h'_g(0)=0$.

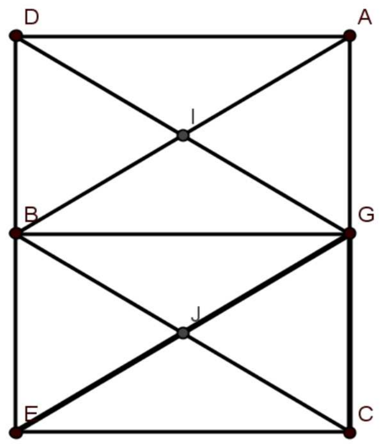
Exercice N°3 :(4 points):

ADBK est un rectangle de centre I tel que

$(\widehat{\overrightarrow{BG};\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ et C = $S_{(BG)}$(A)

On considère J=B∗ C=G*E .

Soit f l'isométrie qui n'a pas de point fixe et qui transforme A en B et B en C et G en E.



1) a) Prouver que ABC est équilatéral.
   b) Prouver que (IJ) est la médiatrice de $[GB]$.
2) Prouver que f n'est pas une translation et déduire la nature de f.
3) Montrer que f(I)=J .
4) Soit l'isométrie φ=f o $S_{(IJ)}$ o $t_{\overrightarrow{JI}}$
   a) Déterminer $\varphi(J)$ et $\varphi(C)$ et φ(E).
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

Exercice N°4 :(4 points):

Le tableau suivant est celui d'une fonction définie sur IR .

x	$-\infty$		-1		4		5		6		$+\infty$
g''(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
g'(x)	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1		0	$\searrow$	$-\infty$

- On admet que $|g''(x)| < \frac{1}{2}$
- Soit f(x) = x-2$\sqrt{x}$

1) a) Déterminer le tableau de signe de g' .
   b) Par une lecture du tableau de variation, déterminer, s'ils existent, les points d'inflexion de la courbe de g (en justifiant).

2) Soit h la fonction définie sur $]-\infty,5]$ par h(x) = f o g '(x) .

- La courbe de h admet un point d'intersection avec la droite d'équation y=x d'abscisse $\alpha \in [-1,4]$.

  a) Montrer que h est dérivable sur $]-\infty,5]$
  b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ et h(5) .
  c) Montrer que h'(x) = g''(x)($1-\frac{1}{\sqrt{g'(x)}}$) pour tout x $\in]-\infty,5]$.
  d) Dresser le tableau de variation de h
  e) Montrer que $|h^{'}(x)| < \frac{1}{2}$ pour tout x $\in [-1,4]$.

3) Soit la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$

  a) Montrer que $-1 \leq U_n \leq 4$ pour tout n $\in$ IN*.
  b) Montrer que $|U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$
  c) En déduire que $|U_n-\alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$ pour tout n $\in$ IN*.
  d) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.5 .

Exercice N°5 :(3,75 points):

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.Soit A(i).

Pour tout nombre complexe z≠ i , on pose f(z) = $\frac{iz}{i-z}$

1) On considère les ensembles des points : E_1= {M(z) $\in$ P tel que f(z) $\in$ IR } et E_2={M(z) $\in$ P tel que $|f(z)|$ = 1 }

a) Déterminer et construire (E_1). **(voir annexe figure n°2)** .
b) Déterminer et construire (E_2). **(voir annexe figure n°2)** .
c) Déterminer $E_1 \cap E_2$

2) a) Pour tout $\theta \in$ IR\{$\frac{\pi}{2}$ +2kπ, k∈z } , on pose z = $e^{i\theta}$. Montrer que f(z) = $\frac{e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}}{2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$

  b) Résoudre dans ℂ , l'équation $z^3=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

  c) Déduire les solutions dans ℂ de l'équation (E) : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(i-z)^3+iz^3=0$

ANNEXE

Figure n°1

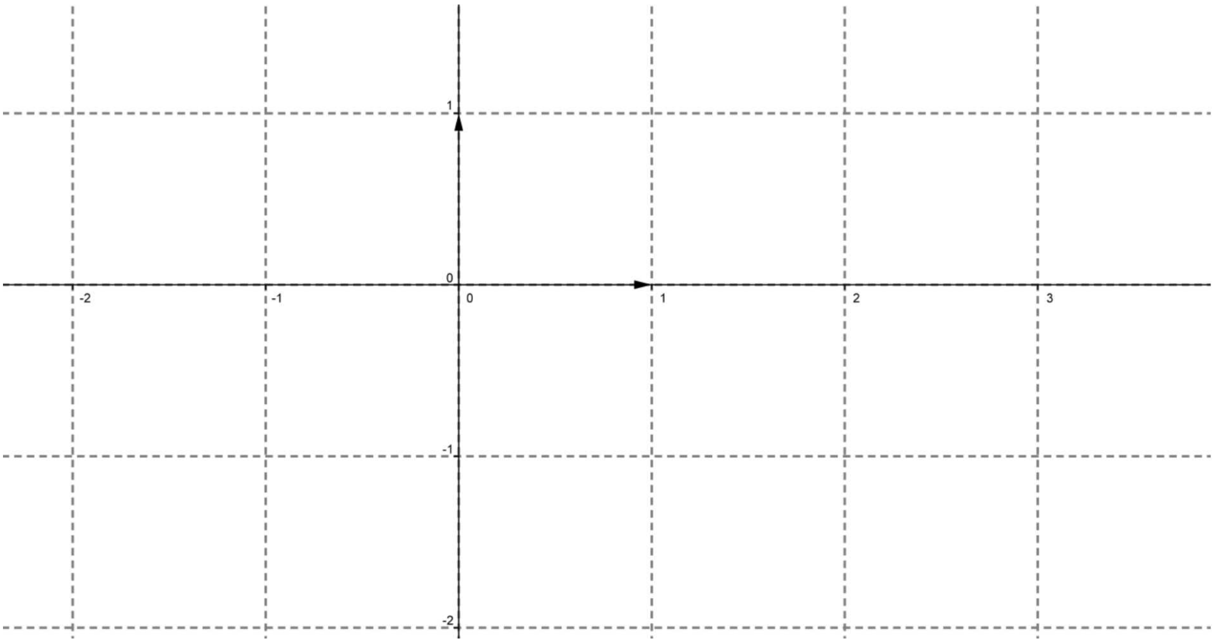


Figure n°2